

## KARTA PRZEDMIOTU

Nazwa w języku polskim: **Mechanika Analityczna**

Nazwa w języku angielskim: **Analytical Mechanics**

Kierunek studiów (jeśli dotyczy): **Mechanika i Budowa Maszyn**

Specjalność (jeśli dotyczy):

Poziom i forma studiów: **II stopień, stacjonarne**

Rodzaj przedmiotu: **obowiązkowy**

Kod przedmiotu: **MMM041005**

Grupa kursów: **nie**

	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Projekt	Seminarium
Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU)	30	15			
Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS)	60	60			
Forma zaliczenia	Egzamin	Zaliczenie na ocenę			
Grupa kursów					
Liczba punktów ECTS	2	2			
w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P)		2			
w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK)	1.2	1.4			

### WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I KOMPETENCJI SPOŁECZNYCH

1. Analiza matematyczna (rachunek różniczkowy i całkowy)
2. algebra liniowa (macierze, wyznaczniki), geometria, trygonometria
3. mechanika I i mechanika II w zakresie stopnia I studiów

## CELE PRZEDMIOTU

C1. Znajomość metod analitycznych w zakresie stosowania mechaniki Lagrange'a w dynamice mechanicznych układów holonomicznych: skleronomicznych i reonomicznych i znajomość analizy ich drgań w przypadku układów zachowawczych o wielu stopniach swobody.

C2. Znajomość dynamiki ruchu kulistego ciała sztywnego z zastosowaniem do żyroskopu (w zakresie teorii przybliżonej). Elementarna znajomość teorii zderzenia cząstek masowych (zderzenie sprężyste i niesprężyste)

C3. Umiejętność samodzielnej analizy złożonych mechanicznych układów z więzami holonomicznymi typu stacjonarnego do wyznaczania ich: równań różniczkowych ruchu, widma częstości drgań własnych, macierzy modalnej. Umiejętność analizy dynamicznej ciał sztywnych w ruchu kulistym i żyroskopu.

C4. Nabywanie i utrwalanie kompetencji społecznych obejmujących inteligencję emocjonalną polegającą na umiejętności współpracy w grupie studenckiej mającej na celu efektywne rozwiązywanie problemów.

Odpowiedzialność, uczciwość i rzetelność w postępowaniu; przestrzeganie obyczajów obowiązujących w środowisku akademickim i społeczeństwie.

## PRZEDMIOTOWE EFEKTY UCZENIA SIĘ

### I. Z zakresu wiedzy:

PEK\_W01 - Potrafi zdefiniować dyskretny układ mechaniczny holonomiczny oraz jego przemieszczenia możliwe i wirtualne. Zna podstawowe zagadnienie dynamiki. Zna klasyfikację układów dynamicznych ze względu na rodzaje więzów. Zna ogólne równanie dynamiki i zasadę prac przygotowanych.

PEK\_W02 - Zna pojęcie współrzędnych uogólnionych i przestrzeni konfiguracji układu dynamicznego. Zna pojęcie uogólnionych sił (aktywnych i bezwładności). Zna równania Lagrange'a I i II rodzaju.

PEK\_W03 - Zna interpretację wariacyjną przemieszczeń wirtualnych, centralne równanie dynamiki i zasadę Hamiltona. Posiada elementarną wiedzę w zakresie układów żyroskopowych i teorii zderzenia.

### II. Z zakresu umiejętności:

PEK\_U01 - Potrafi stosować zasadę prac przygotowanych i zasadę d'Alemberta dla układów holonomicznych.

PEK\_U02 - Potrafi wyprowadzać równania różniczkowe ruchu dyskretnych układów dynamicznych z zastosowaniem równań Lagrange'a i z zasady zachowania energii dla układów zachowawczych holonomicznych.

PEK\_U03 - Potrafi obliczać widmo częstości drgań własnych i wyznaczać macierz modalną dla dyskretnych układów liniowych. Potrafi analizować dynamikę żyroskopu z zastosowaniem teorii przybliżonej (moment żyroskopowy i siły reakcji w podporach). Potrafi obliczać współczynniki zderzenia w zderzeniu niesprężystym.

### III. Z zakresu kompetencji społecznych:

PEK\_K01 - Potrafi wyszukiwać informacje oraz potrafi poddać je krytycznej analizie

PEK\_K02 - Potrafi obiektywnie oceniać argumenty oraz racjonalnie tłumaczyć i uzasadniać własny punkt widzenia

PEK\_K03 - Potrafi przestrzegać obyczajów i zasad obowiązujących w środowisku akademickim

## TREŚCI PROGRAMOWE

Forma zajęć – Wykład		Liczba godzin
Wy1	Program. Wymagania. Przykłady układów dynamicznych. Więzy i ich rodzaje, klasyfikacja układów ze względu na rodzaje więzów (ukł. holonomiczne), prędkości i przemieszczenia możliwe.	2
Wy2	Podstawowe zagadnienie dynamiki, przemieszczenia wirtualne, pojęcie więzów idealnych, ogólne równanie dynamiki, zasada prac przygotowanych.	2

Wy3	Ogólne równanie dynamiki w przypadku ruchu obrotowego i płaskiego ciała sztywnego (przykłady).	2
Wy4	Współrządne uogólnione, wyprowadzanie równań różniczkowych ruchu na podstawie zasady zachowania energii wyrażonej we współrzędnych uogólnionych (przykłady).	2
Wy5	Siły uogólnione. Przestrzeń konfiguracji. Równania Lagrange'a ( II rodzaju).	2
Wy6	Równania Lagrange'a (c.d. przykłady, zastosowania). Funkcja Lagrange'a.	2
Wy7	Układy liniowe o skończonej liczbie stopni swobody, zapis macierzowy, układy zachowawcze.	2
Wy8	Drgania swobodne układów zachowawczych: częstości drgań własnych, macierze modalne, formy drgań.	2
Wy9	Drgania wymuszone harmonicznie, charakterystyki częstotliwościowe, przykład analizy układu drgającego o 2-ch stopniach swobody.	2
Wy10	Dynamika ciała sztywnego w ruchu ogólnym: założenia, ujęcie problematyki. Kinematyka i dynamika ruchu kulistego (przypomnienie z kursu Mechaniki II), kręt w ruchu ogólnym.	2
Wy11	Równania dynamiki w ruchu ogólnym i kulistym ciała sztywnego (równania Eulera).	2
Wy12	Żyroskop ( teoria przybliżona).	2
Wy13	Zarys teorii zderzenia cząstek liniowo sprężystych, współczynnik zderzenia niesprężystego	2
Wy14	Wariacyjne ujęcie mechaniki Lagrange'a.	2
Wy15	Centralne równanie Lagrange'a. Podstawowa zasada całkowa mechaniki (zasada Hamiltona)	2
		Suma: 30
Forma zajęć – Ćwiczenia		Liczba godzin
Ćw1	Wprowadzenie. Wyprowadzanie równań na prędkości możliwe i przemieszczenia wirtualne.	2
Ćw2	Rozwiązywanie zagadnień statycznych z wykorzystaniem zasady prac przygotowanych	2
Ćw3	Rozwiązywanie zadań dynamiki z wykorzystaniem ogólnego równania dynamiki (zasady d'Alemberta).	2
Ćw4	Wyprowadzanie równań różniczkowych ruchu na podstawie zasady zachowania energii oraz równań Lagrange'a (porównanie metod i wyników) dla układów o 1 i 2 stopniach swobody	2
Ćw5	Wyznaczanie częstości drgań własnych i parametrów modalnych dla układów zachowawczych o 2-ch stopniach swobody	2
Ćw6	Rozwiązywanie zadań z kinematyki i dynamiki ruchu kulistego ciała sztywnego.	2
Ćw7	Kolokwium zaliczeniowe	2
Ćw8	Zaliczenia. Poprawa ocen	1
		Suma: 15

## STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

- N1. wykład tradycyjny z wykorzystaniem transparencji i slajdów  
 N2. ćwiczenia rachunkowe  
 N3. konsultacje  
 N4. praca własna – samodzielne studia i przygotowanie do egzaminu

## OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW UCZENIA SIĘ (Wykład)

Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na koniec semestru))	Numer efektu uczenia się	Sposób oceny osiągnięcia efektu uczenia się
F1	PEK_W01- PEK_W03	egzamin pisemno-ustny
P = F1		

## OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW UCZENIA SIĘ (Ćwiczenia)

Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na koniec semestru))	Numer efektu uczenia się	Sposób oceny osiągnięcia efektu uczenia się
F1	PEK_U01 - PEK_U03 PEK_K01 - PEK_K03	Kolokwium zaliczeniowe
P = F1		

## LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA

### LITERATURA PODSTAWOWA

1. B. Gabryszewska, A. Pszonka, „Mechanika”, cz.II, Kinematyka i dynamika, PWr , 1988;
2. J. Zawadzki, W. Siuta, „Mechanika ogólna”, PWN, Warszawa 1971;
3. B. Skalmierski, „Mechanika”, PWN, Warszawa 1982;
4. M. Lunn, A First Course in Mechanics, Oxford Science Publications, 1991

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. M. Kulisiewicz, St. Piesiak, „Metodologia modelowania i identyfikacji mechanicznych układów dynamicznych”, PWr. 1994;
2. J. Leyko , „Mechanika ogólna”, WNT, Warszawa 1980;
3. J. Giergiel, „Mechanika ogólna”, WNT, Warszawa 1980

OPIEKUN PRZEDMIOTU

dr hab. inż. Mirosław Bocian tel.: 320-27-54 email: [miroslaw.bocian@pwr.edu.pl](mailto:miroslaw.bocian@pwr.edu.pl)

## SUBJECT CARD

Name in Polish: **Mechanika Analityczna**

Name in English: **Analytical Mechanics**

Main field of study (if applicable): **Mechanical Engineering and Machine Building**

Specialization (if applicable):

Level and form of studies: **II level, full-time**

Kind of subject: **obligatory**

Subject code: **MMM041005**

Group of courses: **no**

	Lecture	Classes	Laboratory	Project	Seminar
Number of hours of organized classes in University (ZZU)	30	15			
Number of hours of total student workload (CNPS)	60	60			
Form of crediting	Examination	Crediting with grade			
Group of courses					
Number of ECTS points	2	2			
including number of ECTS points for practical (P) classes		2			
including number of ECTS points for direct teacher-student contact (BK) classes	1.2	1.4			

### PREREQUISITES RELATING TO KNOWLEDGE, SKILLS AND OTHER COMPETENCES

1. Mathematical analysis (differential and integral calculus)
2. Linear algebra (matrices, determinants), geometry, trigonometry
3. Mechanics I and mechanics II in range of study stage I

## SUBJECT OBJECTIVES

C1. Knowledge of analytical methods for the application of Lagrangian mechanics in the dynamics of mechanical holonomic systems (for systems with constraints depending and not depending from time). Knowledge of vibration analysis of linear holonomic conservative systems with many degrees of freedom.

C2. Knowledge of the dynamics of a rigid body in case of the spherical rotation about a fixed point. The using in to the gyroscope (in approximate theory range). Elementary knowledge of the theory of mass collisions (elastic and inelastic collision)

C3. Ability to independently analyze complex mechanical systems with a holonomic constraints which are not depend on time to determine : differential equations of movement, natural vibration frequency spectrum, the modal matrix. The ability of dynamic analysis of rigid bodies in case of the spherical rotation about a fixed point and gyroscope.

C4. The acquisition and consolidation of social skills including emotional intelligence relying ability to work in a group of students with a view to effective problem solving.

Responsibility, honesty and fairness in conduct; observance of manners in the academic community and society

## SUBJECT LEARNING OUTCOMES

### I. Relating to knowledge:

PEK\_W01 - He can define a discrete mechanical holonomic system and its possible and virtual displacements. He knows the fundamental problem of dynamics. He knows the classification of dynamical systems in respect of the constraint types. He knows the general equation of dynamics and the principle of virtual work.

PEK\_W02 - He knows the notion of generalized coordinates and configuration space of a dynamical system. He knows the concept of generalized forces (active and inertia). He knows the Lagrange's equations of the first and second kind.

PEK\_W03 - He knows the variational interpretation of virtual displacements, the central equation of the dynamics and the Hamilton's principle. He has an elementary knowledge of gyroscopic systems and collision theory.

### II. Relating to skills:

PEK\_U01 - He is able to apply the virtual work principle and d'Alembert's principle for holonomic systems

PEK\_U02 - He can derive the differential equations of motion of discrete dynamical systems by using Lagrange's equations and by using the energy conservation law for conservative holonomic systems.

PEK\_U03 - He can calculate the spectrum of natural frequencies and can determine the modal matrix for discrete conservative linear systems. He is able to analyze the dynamics of the gyro using the approximate theory (gyroscopic moment and reaction forces in the supports). He can calculate the collision coefficients in inelastic collision.

### III. Relating to social competences:

PEK\_K01 - He can search information and is able to critical review

PEK\_K02 - He can objectively evaluate the arguments and rationally explain and justify own point of view.

PEK\_K03 - He can observe the customs and rules of the academic community.

## PROGRAM CONTENT

Form of classes – Lecture

Number of  
hours

Lec1	Curriculum. Requirements. Examples of dynamic systems. Constrains and their types, classification systems for the sake of the constrain types (holonomic systems), possible velocities and possible displacements.	2
Lec2	The fundamental problem of dynamics, virtual displacement, the notion of ideal constraints, the general equation of dynamics, the virtual work principle.	2
Lec3	The dynamic general equation for the rotational and planar motion of rigid body (examples)	2
Lec4	Generalized coordinates. Derivation of differential equations of motion by using the energy conservation law expressed in generalized coordinates (examples).	2
Lec5	Generalized forces. Configuration space. Lagrange's equations (of II type).	2
Lec6	Lagrange's equations (cont. examples, applications). Lagrangian.	2
Lec7	Linear systems with a finite number of degrees of freedom, matrix notation, conservative systems.	2
Lec8	Free vibrations of conservative systems: natural frequencies, modal matrices, mode shapes.	2
Lec9	Harmonically forced vibration, frequency characteristics, an example of oscillation analysis of two- degree- of- freedom system.	2
Lec10	The dynamics of a rigid body in general motion: the orientation, the recognition issue. Kinematics and dynamics of rigid body in case the spherical rotation about a fixed point (reminder of the course Mechanics II), the angular momentum in the general movement.	2
Lec11	The dynamic equations for general motion of rigid body (Euler's equation).	2
Lec12	Gyroscope (approximate theory).	2
Lec13	An outline of linear elastic particle collisions theory, inelastic collision rate.	2
Lec14	Variational approach of Lagrangian mechanics.	2
Lec15	The central Lagrange's equation. Fundamental integral mechanical principle (Hamilton's principle)	2
		Total hours: 30
Form of classes – Classes		Number of hours
CI1	Introduction. Derivation of equations for possible velocities and virtual displacements.	2
CI2	Solving of static problems by using a principle of virtual work	2
CI3	Solving of dynamic problems by using a dynamic general equation (d'Alembert's principle).	2
CI4	Derivation of motion differential equations based on the energy conservation law and Lagrange's equations (comparison of methods and results) for systems with one and two degrees of freedom	2
CI5	Determination of the natural frequencies and modal parameters for conservative systems with two degrees of freedom	2
CI6	Solving some kinematic and dynamic problems in case of the spherical rotation about a fixed point of a rigid body.	2
CI7	Final test	2



CI8	Credits. Improvement of marks	1
		Total hours: 15

TEACHING TOOLS USED		
N1. traditional lecture with the use of transparencies and slides N2. calculation exercises N3. tutorials N4. self study - self studies and preparation for examination		

EVALUATION OF SUBJECT LEARNING OUTCOMES ACHIEVEMENT (Lecture)		
Evaluation (F – forming (during semester), P – concluding (at semester end))	Learning outcomes number	Way of evaluating learning outcomes achievement
F1	PEK_W01- PEK_W03	written and oral exam
P = F1		

EVALUATION OF SUBJECT LEARNING OUTCOMES ACHIEVEMENT (Classes)		
Evaluation (F – forming (during semester), P – concluding (at semester end))	Learning outcomes number	Way of evaluating learning outcomes achievement
F1	PEK_U01 - PEK_U03 PEK_K01 - PEK_K03	Final test
P = F1		

## PRIMARY AND SECONDARY LITERATURE

### PRIMARY LITERATURE

1. B. Gabryszewska, A. Pszonka, "Mechanics", part II, kinematics and dynamics, Wrocław University of Technology, 1988;
2. J. Zawadzki, W. Siuta, "General Mechanics", PWN, Warsaw, 1971;
3. B. Skalmierski, "Mechanics", PWN, Warsaw, 1982;
4. M. Lunn, A First Course in Mechanics, Oxford Science Publications, 1991

### SECONDARY LITERATURE

1. M. Kulisiewicz St. Piesiak, "Methodology of modeling and identification of mechanical dynamical systems", WUT, 1994;
- 2 J. Leyko, "General Mechanics", WNT, Warsaw, 1980;
- 3 J. Giergiel, "General Mechanics", WNT, Warsaw, 1980

## SUBJECT SUPERVISOR

dr hab. inż. Mirosław Bocian tel.: 320-27-54 email: [miroslaw.bocian@pwr.edu.pl](mailto:miroslaw.bocian@pwr.edu.pl)