

## KARTA PRZEDMIOTU

Nazwa w języku polskim: **Analiza matematyczna 2.1 A**

Nazwa w języku angielskim: **Mathematical Analysis 2.1 A**

Kierunek studiów (jeśli dotyczy): **Mechatronika**

Poziom i forma studiów: **I stopień, stacjonarne**

Rodzaj przedmiotu: **ogólnouczelniany**

Kod przedmiotu: **MAT001422**

Grupa kursów: **nie**

	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Projekt	Seminarium
Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU)	30	30			
Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS)	120	90			
Forma zaliczenia	Egzamin	Zaliczenie na ocenę			
Grupa kursów					
Liczba punktów ECTS	4	3			
w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P)		3			
w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK)	3.0	2.0			

### WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I KOMPETENCJI SPOŁECZNYCH

1. Potrafi badać zbieżność ciągów oraz obliczać granice funkcji jednej zmiennej
2. Zna rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej i jego zastosowania
3. Zna i umie stosować całkę nieoznaczoną funkcji jednej zmiennej
4. Zna podstawowe pojęcia z algebry liniowej

## CELE PRZEDMIOTU

- C1. Poznanie konstrukcji i własności całki oznaczonej. Nabycie umiejętności stosowania całki oznaczonej (w tym niewłaściwej) do obliczeń inżynierskich
- C2. Poznanie podstawowych pojęć z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych
- C3. Opanowanie podstawowej wiedzy dotyczącej szeregów liczbowych i potęgowych
- C4. Stosowanie nabytej wiedzy do tworzenia i analizy modeli matematycznych w celu rozwiązywania zagadnień teoretycznych i praktycznych w różnych dziedzinach nauki i techniki.

## PRZEDMIOTOWE EFEKTY UCZENIA SIĘ

### I. Z zakresu wiedzy:

PEK\_W01 - zna konstrukcję całki oznaczonej i jej własności, zna pojęcie całki niewłaściwej

PEK\_W02 - zna podstawy rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych

PEK\_W03 - ma podstawową wiedzę z teorii szeregów liczbowych i potęgowych, zna kryteria zbieżności

### II. Z zakresu umiejętności:

PEK\_U01 - potrafi obliczać i interpretować całkę oznaczoną, potrafi rozwiązywać zagadnienia inżynierskie z wykorzystaniem całki

PEK\_U02 - Potrafi obliczać pochodne cząstkowe, kierunkowe i gradient funkcji wielu zmiennych i interpretować otrzymane wielkości, potrafi rozwiązywać zadania optymalizacyjne dla funkcji wielu zmiennych

PEK\_U03 - potrafi obliczać i interpretować całkę wielokrotną, potrafi rozwiązywać zagadnienia inżynierskie z wykorzystaniem całki podwójnej i potrójnej

PEK\_U04 potrafi rozwijać funkcje w szereg potęgowy, umie wykorzystać otrzymane rozwinięcia do obliczeń przybliżonych

### III. Z zakresu kompetencji społecznych:

## TREŚCI PROGRAMOWE

Forma zajęć – Wykład		Liczba godzin
Wy1	Całka oznaczona. Definicja. Interpretacja geometryczna i fizyczna. Twierdzenie Newtona - Leibniza. Całkowanie przez części i przez podstawienie.	2
Wy2	Własności całki oznaczonej. Średnia wartość funkcji na przedziale. Zastosowania całek oznaczonych w geometrii (pole, długość łuku, objętość bryły obrotowej, pole powierzchni bocznej bryły obrotowej) i technice.	3
Wy3	Całka niewłaściwa I rodzaju. Definicja. Kryterium porównawcze i ilorazowe zbieżności. Przykłady wykorzystania całek niewłaściwych I rodzaju w geometrii i technice.	2
Wy4	Funkcje dwóch i trzech zmiennych. Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni. Przykłady wykresów funkcji dwóch zmiennych. Powierzchnie drugiego stopnia.	2
Wy5	Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Definicja. Interpretacja geometryczna. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Twierdzenie Schwarz'a.	2

Wy6	Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji dwóch zmiennych. Różniczka funkcji i jej zastosowania. Pochodne cząstkowe funkcji złożonych. Pochodna kierunkowa. Gradient funkcji.	2
Wy7	Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych. Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum. Ekstrema warunkowe funkcji dwóch zmiennych. Najmniejsza i największa wartość funkcji na zbiorze. Przykłady zagadnień ekstremalnych w geometrii i technice..	3
Wy8	Całki podwójne. Definicja całki podwójnej. Interpretacja geometryczna i fizyczna. Obliczanie całek podwójnych po obszarach normalnych.	2
Wy9	Własności całek podwójnych. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych. Całka podwójna we współrzędnych biegunowych.	2
Wy10	Całki potrójne. Zamiana całek potrójnych na iterowane. Zamiana zmiennych na współrzędne walcowe i sferyczne.	2
Wy11	Zastosowania całek podwójnych i potrójnych w geometrii, fizyce i technice..	2
Wy12	Szeregi liczbowe. Definicja szeregu liczbowego. Suma częściowa, reszta szeregu. Szereg geometryczny. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych. Zbieżność bezwzględna i warunkowa. Kryterium Leibniza. Przybliżone sumy szeregów.	4
Wy13	Szeregi potęgowe. Definicja szeregu potęgowego. Promień i przedział zbieżności. Twierdzenie Cauchy`ego – Hadamarda. Szereg Taylora i Maclaurina. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.	2
		Suma: 30
Forma zajęć – Ćwiczenia		Liczba godzin
Ćw1	Obliczanie całek oznaczonych z wykorzystaniem metod poznanych na wykładzie. Badanie zbieżności całek niewłaściwych Stosowanie całki oznaczonej do obliczeń inżynierskich..	5
Ćw2	Wyznaczanie dziedzin naturalnych funkcji wielu zmiennych oraz badanie ich wykresów. Obliczanie granic i badanie ciągłości funkcji wielu zmiennych	4
Ćw3	Obliczanie pochodnych cząstkowych. Wyznaczanie płaszczyzny stycznej. Szacowanie z wykorzystaniem różniczki. Obliczanie pochodnych kierunkowych i gradientu.	3
Ćw4	Wyznaczanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych. Wyznaczanie ekstremów warunkowych.	4
Ćw5	Obliczanie całek podwójnych i potrójnych po obszarach normalnych. Zamiana kolejności całek iterowanych. Obliczenia całek z zamianą zmiennych na współrzędne biegunowe i sferyczne. Stosowanie całki podwójnej i potrójnej do obliczeń inżynierskich.	8
Ćw6	Obliczanie sumy szeregów liczbowych. Badanie zbieżności warunkowej i bezwarunkowej Badanie zbieżności szeregów potęgowych. Wyznaczanie szeregów Maclaurina. Przybliżone obliczanie szeregów i całek..	4
Ćw7	Kolokwium zaliczeniowe	2
		Suma: 30

## STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1. Wykład – metoda tradycyjna  
 N2. Ćwiczenia problemowe i rachunkowe – metoda tradycyjna  
 N3. konsultacje  
 N4. Praca własna studenta – przygotowanie do ćwiczeń.

## OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW UCZENIA SIĘ (Wykład)

Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na koniec semestru))	Numer efektu uczenia się	Sposób oceny osiągnięcia efektu uczenia się
F1	PEK_W01-PEK_W03	Egzamin
P = F1		

## OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW UCZENIA SIĘ (Ćwiczenia)

Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na koniec semestru))	Numer efektu uczenia się	Sposób oceny osiągnięcia efektu uczenia się
F1	PEK_U01-PEK_U04	Odpowiedzi ustne, kartkówki, kolokwia
P = F1		

## LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] W. Żakowski, W. Kołodziej, Matematyka, Cz. II, WNT, Warszawa 2003.
- [2] W. Żakowski, W. Leksiński, Matematyka, Cz. IV, WNT, Warszawa 2002.
- [3] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.
- [4] M. Gewert, Z. Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011.
- [5] W. Krywicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I-II, PWN, Warszawa 2006.

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, T. I-II, PWN, Warszawa 2007.
- [2] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2, Definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.
- [3] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych, PWN, Warszawa 2008.
- [4] R. Leitner, Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych, Cz. 1-2, WNT, Warszawa 2006.
- [5] H. i J. Musielakowie, Analiza matematyczna, T. I, Cz. 1-2 oraz T. II, Cz. 1, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1993 oraz 2000.
- [6] J. Pietraszko, Matematyka. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
- [7] W. Stankiewicz, Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, Cz. B, PWN, Warszawa 2003.

## OPIEKUN PRZEDMIOTU

doc. dr inż. Zbigniew Skoczylas email: [zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl](mailto:zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl)

Faculty of Mechanical Engineering

## SUBJECT CARD

Name in Polish: **Analiza matematyczna 2.1 A**

Name in English: **Mathematical Analysis 2.1 A**

Main field of study (if applicable): **Mechatronics**

Level and form of studies: **I level, full-time**

Kind of subject: **university-wide**

Subject code: **MAT001422**

Group of courses: **no**

	Lecture	Classes	Laboratory	Project	Seminar
Number of hours of organized classes in University (ZZU)	30	30			
Number of hours of total student workload (CNPS)	120	90			
Form of crediting	Examination	Crediting with grade			
Group of courses					
Number of ECTS points	4	3			
including number of ECTS points for practical (P) classes		3			
including number of ECTS points for direct teacher-student contact (BK) classes	3.0	2.0			

## PREREQUISITES RELATING TO KNOWLEDGE, SKILLS AND OTHER COMPETENCES

1. Can explore convergence of sequences and calculate the limits of functions of one variable
2. Knows the calculus of functions of one variable and its applications
3. Knows and can use the indefinite integral functions of one variable
4. Knows the basic concepts of linear algebra

## SUBJECT OBJECTIVES

- C1. Knowing the structure and properties of the definite integral. Acquiring skills in the use of the definite integral (including inappropriate) for engineering calculations
- C2. Understanding the basic concepts of differential and integral calculus of several variables
- C3. Mastery of basic knowledge about numerical series and power series
- C4. Application of acquired knowledge to develop and analyze mathematical models to solve theoretical and practical issues in various fields of science and technology

## SUBJECT LEARNING OUTCOMES

### I. Relating to knowledge:

PEK\_W01 - Knows the structure of the definite integral and its properties, knows the concept of the integral wrong

PEK\_W02 - Knows the basics of differential and integral calculus of several variables

PEK\_W03 - Has a basic knowledge of the theory of series and power series, knows the convergence criteria

### II. Relating to skills:

PEK\_U01 - He can calculate and interpret the definite integral, is able to solve engineering problems using integrals

PEK\_U02 - He can calculate partial derivatives, directional and gradient function of several variables and interpret the values, is able to solve tasks of optimization for the function of many variables

PEK\_U03 - He can calculate and interpret the multiple integral, is able to solve engineering problems using double and triple integrals

PEK\_U04 He can develop functions in power series, knows how to use received results for estimated calculations

### III. Relating to social competences:

## PROGRAM CONTENT

Form of classes – Lecture		Number of hours
Lec1	Mathematical notations (logical connectives, quantifiers), elements of set theory, real numbers, subsets of real numbers (intervals, half-lines). Linear and quadratic functions	2
Lec2	Basic properties of functions (injective and monotonic functions). Composition of functions. The inverse function. Power and exponential functions, and opposite to them. Properties of logarithms	3
Lec3	Trigonometric functions and their inverses. Graphs of trigonometric and of its inverses	2
Lec4	Sequences and limits. Basic formulas and theorems. Number e. Improper limits	2
Lec5	The limit of a function in a point. Directional limits of function. Asymptotics of function	2
Lec6	Continuity of a function in a point and on the interval. Basic properties of continuous functions. Approximate solutions of equations. Points of discontinuity	2
Lec7	The definition of derivative. Basic formulas and theorems. Geometric and physics interpretations. Mean value theorem. De L'Hospital rule	3
Lec8	Extreme values, monotonicity. Higher order derivatives. Convexity of function	2
Lec9	Examination of the graph of a function.	2
Lec10	Taylor formula. Approximation of function. Applications	2

Lec11	Definite integral. Simple examples. Connection between integral and derivative (Fundamental Theorem of Calculus). Simple examples	2
Lec12	Indefinite integral: basic formulas. Areas of simple figures	4
Lec13	The basic methods of calculus of integrals: integration by parts and by substitution	2
		Total hours: 30
Form of classes – Classes		Number of hours
CI1	Tautologies, de Morgan laws, union, intersection and complement of set	5
CI2	Natural numbers, integers, rational and real numbers. Logarithm	4
CI3	Graphs of simple functions. Inverse function. Composition of functions	3
CI4	Trigonometric functions and trigonometric identities	4
CI5	Limit of sequences	8
CI6	The limit of a function in point	4
CI7	Continuous functions	2
		Total hours: 30

TEACHING TOOLS USED		
N1. Lecture - traditional method N2. Classes - traditional method N3. tutorials N4. Student's self-work – preparation to classes		

EVALUATION OF SUBJECT LEARNING OUTCOMES ACHIEVEMENT (Lecture)		
Evaluation (F – forming (during semester), P – concluding (at semester end))	Learning outcomes number	Way of evaluating learning outcomes achievement
F1	PEK_W01-PEK_W03	Exam or e-exam
P = F1		

EVALUATION OF SUBJECT LEARNING OUTCOMES ACHIEVEMENT (Classes)		
Evaluation (F – forming (during semester), P – concluding (at semester end))	Learning outcomes number	Way of evaluating learning outcomes achievement
F1	PEK_U01-PEK_U04	Oral answers, quizzes, written tests and/or e-tests
P = F1		

PRIMARY AND SECONDARY LITERATURE
<p><u>PRIMARY LITERATURE</u></p> <p>[1] W. Żakowski, W. Kołodziej, Matematyka, Cz. II, WNT, Warszawa 2003.</p> <p>[2] W. Żakowski, W. Leksiński, Matematyka, Cz. IV, WNT, Warszawa 2002.</p> <p>[3] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.</p> <p>[4] M. Gewert, Z. Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011.</p> <p>[5] W. Krywicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I-II, PWN, Warszawa 2006.</p> <p><u>SECONDARY LITERATURE</u></p> <p>[1] G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, T. I-II, PWN, Warszawa 2007.</p> <p>[2] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2, Definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.</p> <p>[3] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych, PWN, Warszawa 2008.</p> <p>[4] R. Leitner, Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych, Cz. 1-2, WNT, Warszawa 2006.</p> <p>[5] H. i J. Musielakowie, Analiza matematyczna, T. I, Cz. 1-2 oraz T. II, Cz. 1, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1993 oraz 2000.</p> <p>[6] J. Pietraszko, Matematyka. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.</p> <p>[7] W. Stankiewicz, Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, Cz. B, PWN, Warszawa 2003.</p>

SUBJECT SUPERVISOR
doc. dr inż. Zbigniew Skoczylas email: zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl